

## quelques jolis exercices d'arithmétique

- 
1. Si un entier naturel  $a$  n'est pas un carré dans  $\mathbf{N}$ ,  $\sqrt{a}$  est irrationnel.
- 

*Solution :*

Nous allons prouver l'énoncé contraposé. Posons  $x = \sqrt{a}$  ; notons  $y = x - \lfloor x \rfloor$  sa partie décimale. Supposons que  $x$  soit rationnel ; il nous faut montrer qu'il est entier, c'est-à-dire que  $y = 0$ .

Pour cela, soit  $q$  le plus petit entier  $> 0$  tel que  $qx$  soit entier ; on notera que  $q' = qy$  est donc entier. Je prétends que  $q'x$  est un entier. De fait,  $q'x = q(x - \lfloor x \rfloor)x = qx^2 - qx\lfloor x \rfloor$  ;  $qx^2 = qa$  est évidemment entier, et  $qx$  l'est par hypothèse, donc aussi  $qx\lfloor x \rfloor$ .

D'autre part, puisque  $0 \leq y < 1$ , on a  $0 \leq q' < q$ . Or  $q$  est le *plus petit* entier  $> 0$  tel que  $qx$  soit entier ; par conséquent,  $q' = 0$ , d'où  $y = 0$ .

*Conséquence.* — Tout entier qui ne figure pas dans une table de carrés a une racine carrée irrationnelle. On voit d'un seul coup que, par exemple,  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$  sont irrationnels.

- 
2. Extension : soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Si un entier naturel  $a$  n'est pas une puissance  $n$ -ième dans  $\mathbf{N}$ ,  $\sqrt[n]{a}$  est irrationnel.
- 

*Solution :*

Posons  $x = \sqrt[n]{a}$  ; soit  $y$  sa partie décimale. Supposons que  $x$  soit rationnel ; nous devons montrer que  $y = 0$ .

Soit  $q$  le plus petit entier  $> 0$  tel que chacun des  $qx^i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) soit entier. Comme ci-dessus,  $q' = qy$  est entier, puisque  $qx$  l'est ; d'autre part,

$$q'x^i = q(x - \lfloor x \rfloor)x^i = qx^{i+1} - \lfloor x \rfloor qx^i.$$

Par hypothèse, chacun des  $qx^i$  est un entier, de même que chacun des  $qx^{i+1}$  si  $i < n - 1$  ; et si  $i = n - 1$ ,  $qx^{i+1} = qa$  est aussi entier. En fin de compte, il en résulte que chacun des  $q'x^i$  est entier. Or  $q$  est le plus petit entier à posséder cette propriété, et  $0 \leq q' < q$  ; il en résulte que  $q' = 0$ , d'où  $y = 0$ .

---

**3. Lemme d'Euclide : si un nombre premier divise un produit de facteurs, il divise l'un d'eux.**

---

*Solution :*

Soit  $p$  un tel nombre premier, divisant un produit  $ab$ , mais ne divisant pas  $a$  ; il nous faut montrer que  $p$  divise  $b$ .

Considérons l'ensemble  $E = \{ x \in \mathbb{N}^* \mid p \text{ divise } ax \}$ . Cet ensemble n'est pas vide, puisqu'il contient au moins  $p$ , et il ne contient pas 1, car  $p$  ne divise pas  $a$ . Il possède donc un plus petit élément ( $> 1$ ) ; notons-le  $q$ .

Cet élément divise tous les éléments de  $E$  : en effet, soit  $x \in E$  ; effectuons la division euclidienne de  $x$  par  $q$  :  $x = yq + r$  ( $0 \leq r < q$ ). Comme  $x$  et  $q$  appartiennent à  $E$ ,  $p$  divise  $ax$  et  $aq$ , donc aussi  $a(x - yq) = ar$ . Donc, s'il n'est pas nul,  $r$  appartient à  $E$  ; mais ceci est impossible, car  $r < q$  et  $q$  est le plus petit élément de  $E$ . Par conséquent,  $r = 0$  et  $q$  divise  $x$ .

En particulier,  $q$  divise  $p$  ; mais comme  $p$  est premier et  $q > 1$ , cela signifie que  $q = p$ . Puisque  $b$  appartient à  $E$  ( $p$  divise  $ab$ ), il ( $p$ ) divise aussi  $b$ , ce qui termine la démonstration.

---

**4. Soient  $a, b$  des entiers naturels. Si  $a^2 + b^2$  est divisible par  $ab + 1$ , leur quotient est un carré dans  $\mathbb{N}$ .**

---

*Solution :*

Notons  $k$  ce quotient ; on a donc  $a^2 + b^2 = k(ab + 1)$ , relation qu'on peut considérer comme une équation du second degré en  $a$  et qu'on récrit :

$$(1) \quad a^2 - kba + b^2 - k = 0.$$

Soit  $a'$  l'autre racine. Les relations entre coefficients et racines :

$$\begin{cases} a + a' = kb, \\ aa' = b^2 - k, \end{cases}$$

montrent d'abord que, si  $a \geq b$ , l'autre racine est un entier (relatif) et que  $k = \frac{a'^2 + b^2}{a'b + 1}$ . Notons que cette racine est en fait un entier naturel : en effet, puisque  $k \geq 0$ , on a nécessairement  $a'b \geq -1$  ; mais  $a'b = -1$  n'a lieu que si  $a' = -1, b = 1$  tout en entraînant que  $a'^2 + b^2 = 0 \dots$